# Chern類のあるrefinementとそのL函数への応用

AUTHOR(S):

斎藤, 毅

代数幾何学シンポジウム記録
1991年度　pp.31-41



# chern類のあるrefinementとそのL函数への応用

東大 理　斎藤 毅 (Takeshi Saito)

$\mathcal{E}$をscheme $X$上の階数$n$の局所自由$\mathcal{O}_X$-加群とする。$\mathcal{E}$のchern類$c_i(\mathcal{E})$が$X$のChow群$CH^i(X)$の元として定義されることはよく知られている。ここではそのrefinementとして次のようなものを考える。$D$を$X$の閉部分schemeとし全射$\nu:\mathcal{E}|_D\to\mathcal{O}_D$が与えられているとする。すると最高次のchern類$c_n(\mathcal{E})$は$D$に制限すると0になるから、完全系列$CH^n(X,D)\to CH^n(X)\to CH^n(D)$を成り立たせる相対Chow群$CH^n(X,D)$の元に、$c_n(\mathcal{E})$が自然にもちあがることが期待される。このことに気づいたのはG. Andersonであったが、以下で実際にその定義を与える。さらにその応用として、$X$が有限体上の多様体の場合に、$X$上の$l$進層のL函数の函数等式の定数項の公式について述べる。この公式は層が不分岐の場合には斎藤秀司氏によるものでその場合には通常のchern類が現われる。これをtameな分岐を許す場合に拡張すると上のようなrefinementが必要となる。

## 1. 相対chern類

$X$を正則ネーターscheme $n$を自然数とし．$K_{n,X}$を$X$上の$n$次K群のなすZariski層とする．$X$がGersten予想をみたすと仮定すると．$X$のChow群はBloch-Quillenの公式により$CH^n(X)=H^n(X,K_{n,X})$と表わされる．Gersten予想は完全体上smoothなschemeについてなりたつことが知られており以下で現われる正則schemeはGersten予想をみたすと仮定する．$D=(D_i)_{i\in I}$を$X$の正則な閉部分schemeの有限族で．それらの交わり．つまり任意の$J\subset I$に対し$D_J=\bigcap_{i\in J}D_i$は再び正則であるようなものとする．例えば$D$が$X$の単純正規交叉因子のとき；$D$の既約成分の族$(D_i)_{i\in I}$はこれをみたしている．このとき$X$上のZariski層の複体$K_{n,X,D}$を

$$K_{n,X}\to\bigoplus_{i\in I}K_{n,D_i}\to\bigoplus_{i<j\in I}K_{n,D_i\cap D_j}\to\cdots\to\bigoplus_{\substack{J\subset I\\ |J|=j}}K_{n,D_J}\to\cdots$$

と定義し．相対Chow群をhyper cohomologyにより．
$CH^n(X,D)=H^n(X,K_{n,X,D})$で定義する．

$E$を階数$n$の局所自由$O_X$-加群とする．$r=(r_i)_{i\in I}$を$O_{D_i}$加群の準同型$r_i:E|_{D_i}\to O_{D_i}$の族で．任意の$J\subset I$に対し．$r_J=\sum_{i\in J}r_i:E|_{D_J}\to O_{D_J}^J$が全射になるようなものとする．このときchern類$c_n(E)$のrefinement相対chern類$c_n(E,r)\in CH^n(X,D)$を次のように定義する．$V$を$E$にともなう（共変）

ベクトル束とし. $\Delta=(\Delta_i)_{i\in I}$ を $\Delta_i=r_i^{-1}(1)\subset V_{D_i}$ で定義される $V$ の閉部分 scheme の族とする. すると $r$ についての仮定から各 $J\subset I$ に対し $\Delta_J=\bigcap_{i\in J}\Delta_i$ が正則となることは容易に確かめられる. $Z$ を $V$ の 0 切断とすると K群の性質より. $H^n_Z(V, \mathcal{K}_{n,V,\Delta})\cong H^0(X,\mathbb{Z})$ であり. 右辺の元 1 の $H^n(V,\mathcal{K}_{n,V,\Delta})$ への像として $Z$ の類 $[Z]\in CH^n(V,\Delta)$ が定義される. さらに K群の性質より標準写像 $CH^n(X,D)\to CH^n(V,\Delta)$ が同型であるので. 相対 chern 類 $c_n(\mathcal{E},r)\in CH^n(X,D)$ を $[Z]$ の逆像と定義する. 標準写像 $CH^n(X,D)\to CH^n(X)$ による $c_n(\mathcal{E},r)$ の像が通常の chern 類 $c_n(\mathcal{E})$ と一致することは明らかである.

例. $\dim X=n=1$ の場合. $X$ を1次元正則ネーター scheme, $D$ をその被約な因子とする. このとき相対 Chow 群 $CH^1(X,D)$ は法 $D$ の因子類群 $\left(\bigoplus_{x\notin D}\mathbb{Z}\oplus\bigoplus_{x\in D}K^\times/1+m_x\right)/K^\times$ である. ここで $K$ は $X$ の分数体. $m_x$ は $x$ の極大イデアルとした. $\mathcal{L}$ を可逆 $\mathcal{O}_X$-加群. $r$ を同型 $\mathcal{L}|_D\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_D$ とし. $l$ を $\mathcal{L}$ の 0 でない有理切断とする. このとき $c_1(\mathcal{L},r)$ は. $x\in D$ に対し. $a_x\in K^\times$ を $\mathrm{ord}_x(a_x)=\mathrm{ord}_x(l)$ かつ $r_x(a_x^{-1}l)=1$ となるようにとって $c_1(\mathcal{L},r)=\sum_{x\notin D}\mathrm{ord}_x(l)+\sum_{x\in D}a_x$ で与えられる.

上では相対 chern 類を Chow 群に定義したが. cohomology に定義することもできる. その場合には $j:U=X-\bigcup_{i\in I}D_i\hookrightarrow X$ を開うめこみとして. $c_n(\mathcal{E},r)\in H^{2n}(X,j_!\mathbb{Z}(n)_U)$ が定

義される．これはChow群に定義したもののcycle射による像と一致するが，Gersten予想が知られていなくてChow群には定義できない時などこちらの方が有効なこともある．

以下の応用では$X$が完全体$F$上smoothな$n$次元schemeで，$D$が$X$の単純正規交叉因子である場合に，$D$に対数的極をもつ微分1形式の層$\Omega^1_{X/F}(\log D)$と留数$\mathrm{res}_i : \Omega^1_{X/F}(\log D)|_{D_i} \to \mathcal{O}_{D_i}$の族の相対chern類を扱う．$U = X - D$とし，対$(X, U)$の相対標準類$c_{X,U/F} \in CH^n(X, D)$を$(-1)^n c_n(\Omega^1_{X/F}(\log D), \mathrm{res})$と定義する．$X$がproperの場合には$c_{X,U/F}$の次数は，$U$のEuler数と等しい．

## 2. L函数の函数等式の定数項．

$F$を有限体，$X$を$F$上proper, smoothな$n$次元schemeとし，$U$を$X$の開部分schemeとする．$\ell$を$F$の標数とは異なる素数とし，$\mathcal{F}$を$U$上のsmoothな$\ell$進層とする．$\rho$を$\mathcal{F}$に対応する$U$の基本群$\pi_1(U, \bar{x})$の$\ell$進表現とする．$\mathcal{F}$のL函数は

$$L(U/F, \mathcal{F}, t) = \prod_{x: X\text{の閉点}} \det(1 - \varphi_x \cdot t^{\deg x} ; \mathcal{F}_{\bar{x}})^{-1}$$

と無限積で定義される．ここで$\varphi_x$は$x$の幾何的Frobeniusである．これはetale cohomologyを用いて，

$$L(U/F, \mathcal{F}, t) = \prod_{i=0}^{2n} \det(1 - \varphi_F \cdot t ; H^i_c(U_{\bar{F}}, \mathcal{F}))^{(-1)^{i+1}}$$

と書かれる．したがって函数等式の定数項を

$$\varepsilon_0(U/F, \mathcal{F}) = \prod_{i=0}^{2n} \det(-\varphi_F ; H^i_c(U_{\bar{F}}, \mathcal{F}))^{(-1)^{i+1}}$$

と定義すればL函数は函数等式

$$L(U/F, \mathcal{F}, t) = \varepsilon_0(U/F, \mathcal{F})\, t^{-\chi_c(U_{\bar{F}}, \mathcal{F})} \cdot L(X/F, Rj_*\mathcal{F}^\vee, (q^n t)^{-1})$$

をみたす．ここで $\chi_c(U_{\bar{F}}, \mathcal{F})$ はEuler数，$j: U \to X$ はうめこみ．$\mathcal{F}^\vee$は$\mathcal{F}$の双対層である．以下では，$\mathcal{F}$のふち$X-U$にそっての分岐がtameな場合に，$\varepsilon_0(U, \mathcal{F})$を前節で定義した相対標準類$c_{X,U/F}$を使って表わす公式について説明する．

まず$\mathcal{F}$がふちで不分岐な場合，いいかえれば$X=U$の場合には次のことがすでに知られている．

定理（斉藤秀司）$X$を射影的とし，$\mathcal{F}$を$X$上のsmoothなℓ進層とすると，

$$\varepsilon_0(X/F, \mathcal{F}) = \det \rho(-c_{X/F}) \cdot \varepsilon_0(X/F)^{\mathrm{rk}\,\mathcal{F}}$$

がなりたつ．

ここで $\varepsilon_0(X/F) = \varepsilon_0(X/F, \mathbb{Q}_\ell)$ であり，さらに具体的には，$(-1)^{\rho_X} \cdot q^{\frac{1}{2}n\chi_X}$ に等しい．ここで$q$は$F$の位数．$\chi_X$は$X_{\bar{F}}$のEuler数でこれは$n$が奇数なら偶数となるので$\frac{1}{2}n\chi_X$は常に

整数となる．また $\delta_x$ は $n$ が奇数なら 0 で $n$ が偶数ならば $\varphi_F$ の $H^n(X_{\bar F}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用の固有値 $q^{\frac{n}{2}}$ の重複度である．もしTate予想が正しければこれは cycle 射 $CH^{\frac{n}{2}}(X) \longrightarrow H^n(X_{\bar F}, \mathbb{Q}_\ell)$ の像の階数と等しい．$\det\rho$ は $\mathcal{F}$ に対応する $\pi_1(X, \bar x)$ の $\ell$ 進表現 $\rho$ の行列式が定める $\pi_1^{ab}(X)$ の指標である．ここではそれを不分岐類体論の相互写像 $CH^n(X) \to \pi_1^{ab}(X)$ と合成することにより $CH^n(X)$ の指標とみている．類体論の相互写像は閉点 $x$ の類を幾何的 Frobenius $\varphi_x$ にうつすように正規化しておく．$X$ の標準類 $c_{X/F} = (-1)^n c_n(\Omega^1_{X/F})$ は $CH^n(X)$ の元であるから右辺が定義される．

以下 $D = X - U$ が単純正規交叉因子であるとし，$\mathcal{F}$ を $D$ にそった分岐が tame であるような $U$ 上の smooth $\ell$ 進層とする．$\pi_1(U, \bar x)^{tame}$ を $U$ の $D$ にそった分岐が tame な基本群，すなわち $D$ にそって tamely ramified な $U$ の etale 被覆を統制する $\pi_1(U, \bar x)$ の商とし，$\rho$ を $\mathcal{F}$ に対応する $\pi_1(U, \bar x)^{tame}$ の $\ell$ 進表現とし，$\det\rho$ をその行列式が定める $\pi_1(U)^{ab, tame}$ の指標とする．このとき類体論の相互写像は Poincaré 双対性と cycle 射により $CH^n(X, D) \to \pi_1(U)^{ab, tame}$ へ拡張されるので，$\det\rho(-c_{X,U/F})$ が上と同様に定義される．ここで次の図式は可換である．

$$\begin{array}{ccc} CH^n(X, D) & \longrightarrow & \pi_1(U)^{ab, tame} \\ \downarrow & & \downarrow \\ CH^n(X) & \longrightarrow & \pi_1(X)^{ab} \end{array}$$

$\varepsilon_0(U,\mathcal{F})$の公式にはGauss和の積も現われるのでそれを次のように定義する。有限体$F$の自明でない$\ell$進加法的指標$\psi_0$をひとつ固定する。$F$の有限次拡大$E$と$E^\times$の指標$\chi$に対し、Gaussの和を $\tau_{E/F}(\chi,\psi_0)=-\sum_{a\in E^\times}\chi^{-1}(a)\psi_0(\mathrm{Tr}_{E/F}(a))$ と定義する。$\hat{\mathbb{Z}}'(1)_E$を1の巾根の群の逆極限 $\varprojlim \mu_n(\bar{E})$ とする。$V$を$\hat{\mathbb{Z}}'(1)_E$の$\ell$進表現で次の条件をみたすものとする。

- $\hat{\mathbb{Z}}'(1)_E$のある開部分群があって作用のそこへの制限が巾単となる。
- $q$を$E$の位数とし、$q^*V$を$\hat{\mathbb{Z}}'(1)_E$の自己同型$q$倍によるひきもどしとすると$q^*V$は$\hat{\mathbb{Z}}'(1)_E$の表現として$V$と同型。

このような$V$に対し次の1、2で特徴づけられるGauss和の積$\tau_{E/F}(V,\psi_0)$が一意的に定まる。

1. 完全系列 $0\to V_1\to V\to V_2\to 0$に対し、
$$\tau_{E/F}(V,\psi_0)=\tau_{E/F}(V_1,\psi_0)\times\tau_{E/F}(V_2,\psi_0).$$
2. $\chi$を$\hat{\mathbb{Z}}'(1)_E$の位数$m$の1次指標、$f$を$(\mathbb{Z}/m)^\times$での$q$の位数、$E_f$を$E$の$f$次拡大とするとき、$V=\bigoplus_{i=0}^{f-1} q^{i*}\chi$に対し
$$\tau_{E/F}(V,\psi_0)=\tau_{E_f/F}(\chi,\psi_0).$$

ここで全射 $\hat{\mathbb{Z}}'(1)_E\to E_f^\times=\mu_{q^f-1}(\bar{E})$により$\chi$を$E_f^\times$の指標と同一視した。

上の幾何的状況にもどり、$E_i$を$D$の既約成分$D_i$の定数体とする。すると分岐理論により、$\alpha_i:\hat{\mathbb{Z}}'(1)_{E_i}\to\pi_1(U,\bar{x})^{\mathrm{tame}}$が

共役を除いて定まる。すると $\rho$ の $\alpha_i$ によるひきもどし $\alpha_i^*\rho$ は上の条件をみたすので、$\tau_{E_i/F}(\alpha_i^*(\rho), \psi_0)$ が定義される。$D_i^*$ を $D_i - \bigcup_{j\neq i} D_j$ とし、$c_i = \deg C_{D_i, D_i^*/E_i}$ とおいて、Gauss 和の積を $\tau_{D/F}(\rho, \psi_0) = \prod_i \tau_{E_i/F}(\alpha_i^*(\rho), \psi_0)^{c_i}$ と定義する。

定理. $X$ が射影的とすると上の記号の下で、

$$\varepsilon_0(U/F, \mathcal{F}) = \det\rho(-c_{X,U/F})\cdot\tau_{D/F}(\rho, \psi_0) \times \varepsilon_0(U/F)^{\mathrm{rk}\,\mathcal{F}}$$

がなりたつ。

例. $\dim X = 1$ の場合。$X$ を $F$ 上の proper smooth な曲線とする。$\omega$ を $X$ の有理微分で、$x\in D$ では $\mathrm{ord}_x(\omega) = -1$ かつ $\mathrm{res}_x(\omega) = 1$ となるものとする。一般に Laumon の積公式により

$$\frac{\varepsilon_0(U/F, \mathcal{F})}{\varepsilon_0(U/F)^{\mathrm{rk}\,\mathcal{F}}} = \prod_{x\notin D}\frac{\varepsilon(K_x, \mathcal{F}, \omega)}{\varepsilon(K_x, \mathbb{Q}_\ell, \omega)^{\mathrm{rk}\,\mathcal{F}}} \times \prod_{x\in D}\frac{\varepsilon_0(K_x, \mathcal{F}, \omega)}{\varepsilon_0(K_x, \mathbb{Q}_\ell, \omega)^{\mathrm{rk}\,\mathcal{F}}}$$

がなりたつ。ここで $K_x$ は $X$ の関数体 $K$ の $x$ での完備化であり、右辺の $\varepsilon$, $\varepsilon_0$ は局所 $\varepsilon$ 因子である。局所 $\varepsilon$ 因子の公式により $x\notin D$ ならば、$\dfrac{\varepsilon(K_x, \mathcal{F}, \omega)}{\varepsilon(K_x, \mathbb{Q}_\ell, \omega)^{\mathrm{rk}\,\mathcal{F}}} = \det\rho(\varphi_x^{\mathrm{ord}_x\omega})$ であり

$x \in D$ なら $\dfrac{\varepsilon_0(K_x, \mathcal{F}, \omega)}{\varepsilon_0(K_x, Q_x, \omega)^{\mathrm{rk}\,\mathcal{F}}} = \tau_{K(x)/F}(\quad, \psi_0)$ となる、前節の相対 chern 類の計算例より. この場合の定理が従う.

証明の概略. 証明は Lefschetz pencil を用いて X の次元に関する帰納法による. その際局所体上の多様体についての定理の類似である局所 ε 因子についての公式（以下局所公式と呼ぶ）を使うが、ここではその公式の説明などは略させていただく. くわしくは文献表にあげたプレプリントを見ていただきたい. 局所公式の証明は vanishing cycle の具体的な計算によってなされるが. これについては. 京大数理研短期共同研究"代数幾何学と Hodge 理論"の報告集に書くと思うのでそちらを見て下さい.

簡単のため標数は 2 でないとする. すると Lefschetz pencil をとることにより. 帰納法の仮定を使って次の場合に帰着される. すなわち. X から proper smooth な曲線 Y への平坦な射 f で以下をみたすものが存在する. $V = f(U)$, $T = Y - V$ とおくと. $X_V = X \times_Y V$ は V 上 smooth で $D_V = D \times_Y V$ は $X_V$ の f に関して相対的に正規交叉因子であり. 各 $y \in T$ については fiber $X_y$ の各既約因子の重複度は標数と素（実際には 1 または 2）となる. ここで上の例のような Y の有理微分 ω を

とり Leray のスペクトル系列と Laumon の積公式を使うと，

$$\frac{\varepsilon_0(U/F, \mathcal{F})}{\varepsilon_0(U/F)^{rk\mathcal{F}}} = \prod_{y \in V} \frac{\varepsilon(K_y, Rf_!\mathcal{F}, \omega)}{\varepsilon(K_y, Rf_! \mathbb{Q}_\ell, \omega)^{rk\mathcal{F}}} \times \prod_{y \in T} \frac{\varepsilon_0(K_y, Rf_!\mathcal{F}, \omega)}{\varepsilon_0(K_y, Rf_! \mathbb{Q}_\ell, \omega)^{rk\mathcal{F}}}$$

がえられる．ここで局所ε因子の公式を使うと，$y \in V$ ならば

$$\frac{\varepsilon(K_y, Rf_!\mathcal{F}, \omega)}{\varepsilon(K_y, Rf_! \mathbb{Q}_\ell, \omega)^{rk\mathcal{F}}} = \left(\frac{\varepsilon_0(U_y/\kappa(y), \mathcal{F})}{\varepsilon_0(U_y/\kappa(y))^{rk\mathcal{F}}}\right)^{ord_y \omega}$$

となり，これは帰納法の仮定により計算できる．一方右辺第2項は局所公式を適用して計算ができる．そこで完全系列

$$0 \to f^*\Omega^1_{Y/F}(\log T) \to \Omega^1_{X/F}(\log D) \to \Omega^1_{X/Y}(\log D/\log T) \to 0$$

からえられる相対 chern 類の関係式

$$c_n(\Omega^1_{X/F}(\log D), res) = f^*c_1(\Omega^1_{Y/F}(\log T)) \cdot c_{n-1}(\Omega^1_{X/Y}(\log D/\log T))$$
$$+ \text{補正項}$$

を使って右辺を整理すると定理の公式がえられる．上の完全系列で $\Omega^1_{X/Y}(\log D/\log T)$ は階数 $n-1$ の局所自由加群であるが補正項は，$\Omega^1_{X/F}(\log D)$ と $\Omega^1_{Y/F}(\log T)$ の階数が，$y \in T$ の fiber において重複度倍だけ異なることによる寄与の分である．

文献

斎藤秀司，"Functional equations of L-functions of varieties over finite fields" J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA Math 31 (1984) 287–296.

G. Laumon. "Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionelles. et conjecture de Weil" Publ. Math. IHES. 65 (1987) 131–210.

斎藤 毅 "ε-factor of a tamely ramified sheaf on a variety" 東大プレプリント シリーズ.